ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THANH MAI

CHIỀU, SỐ BỘI VÀ TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ GẮN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG VỚI GIÁ CỰC ĐẠI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THANH MAI

CHIỀU, SỐ BỘI VÀ TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ GẮN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG VỚI GIÁ CỰC ĐẠI

Ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 8.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS Lê Thị Thanh Nhàn

THÁI NGUYÊN - 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn, các kết quả nghiên cứu là trung thực và chưa được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Thanh Mai

Xác nhận	**Xác nhận**
của khoa chuyên môn	**của người hướng dẫn khoa học**
	GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn

LỜI CẢM ƠN

Luận văn "Chiều, số bội và iđêan nguyên tố gắn kết của môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại" được thực hiện tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình, tận tụy của GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Tác giả xin bảy tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình. Đồng thời, tác giả xin trân trọng cảm ơn tới TS. Trần Đỗ Minh Châu với sự giúp đỡ của cô trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái nguyên, Ban chủ nhiệm Khoa Toán cùng các thầy cô khoa Toán đã tham gia giảng dạy và tạo điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Nhân dịp này, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập.

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và M là R-môđun hữu hạn sinh. Chiều Krull, tập iđêan nguyên tố liên kết, đa thức Hilbert-Samuel và số bội là các bất biến quan trọng của M trong nghiên cứu môđun này. Chúng có mối liên hệ chặt chẽ với nhau. Nếu kí hiệu chiều của M là d thì từ một kết quả quen thuộc $\operatorname{Supp}_R(M) = \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R M)$ và $\min \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R M) = \min \operatorname{Ass}_R(M)$ ta tính được d thông qua tập iđêan nguyên tố liên kết của M. Hơn nữa, d cũng chính là bậc của đa thức Hilbert-Samuel. Số bội của M tương ứng với một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ $\mathfrak{q}$ của R bằng tích của $d!$ với hệ số cao nhất của đa thức Hilbert-Samuel. Số bội còn được tính thông qua tập iđêan nguyên tố liên kết nhờ công thức liên kết cho số bội.

Đối với mỗi R-môđun Artin A, nhìn chung công thức $\operatorname{Supp}_R(A) = \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R A)$ không còn đúng. Thêm vào đó $\operatorname{Supp}_R(A)$, nếu khác rỗng chỉ gồm iđêan cực đại. Vì thế chiều Krull và tập iđêan nguyên tố liên kết không có ý nghĩa trong nghiên cứu cấu trúc của môđun Artin A. Năm 1971, D. Kirby [11] đã chỉ ra rằng nếu I là iđêan của R sao cho $\ell(0 :_A I)$ hữu hạn thì $\ell(0 :_A I^n)$ là một đa thức khi n đủ lớn. Ông gọi đa thức này là *đa thức Hilbert* của môđun Artin A vì vai trò của nó đối với A tương tự như vai trò của đa thức Hilbert-Samuel đối với môđun hữu hạn sinh. Sau đó, R. N. Roberts [21] đã đưa ra khái niệm chiều Noether (lúc đầu ông gọi là chiều Krull nhưng kí hiệu là Kdim, chiều Noether là thuật ngữ do D. Kirby đổi lại để tránh nhầm lẫn với chiều Krull). Trong [21], ông đã chứng minh được chiều Noether của môđun Artin A chính bằng bậc của đa thức Hilbert của A. Chính vì thế, chiều Noether là thích hợp nhất để đi đến định nghĩa hệ bội, hệ tham số cho môđun Artin và xây dựng công thức liên kết cho số bội của môđun Artin. Năm 1973, I. G. Macdonald [12] đã giới thiệu lý thuyết biểu diễn thứ cấp và đưa ra khái niệm iđêan nguyên tố gắn kết của một môđun. Đối với mỗi môđun Artin A, vai trò của tập tất cả các iđêan nguyên tố gắn kết hoàn toàn tương tự vai trò của tập iđêan nguyên tố liên kết đối với môđun hữu hạn sinh. Chú ý rằng, môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ luôn là Artin tại mọi cấp. Vì thế chiều Noether và tập iđêan nguyên tố gắn kết cũng như số bội có vai trò quan trọng trong nghiên cứu môđun đối đồng điều địa phương.

Mục tiêu của luận văn là trình bày lại các kết quả gần đây của các tác giả M. Brodmann, N. T. Cường, L. T. Nhàn, T. N. An, P. H. Quý, T. Đ. M. Châu, ... trong các bài báo [3], [7], [8], [17], [18], [19], ... về chiều, tập iđêan nguyên tố gắn kết và số bội của các môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại. Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung luận văn được trình bày thành hai chương:

Chương 1 trình bày các kết quả về tập iđêan nguyên tố gắn kết, chiều và số bội cho môđun Artin.

Chương 2, chương chính của luận văn trình bày một số kết quả về chiều, tập iđêan nguyên tố gắn kết và công thức liên kết cho số bội của môđun đối đồng địa phương Artin với giá cực đại $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Chương 1

Iđêan nguyên tố gắn kết, chiều, số bội cho môđun Artin

Trong toàn bộ luận văn này, luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương; M và R-môđun hữu hạn sinh chiều d, A là R-môđun Artin, N là R-môđun hữu hạn sinh tuỳ ý và L là R-môđun bất kì. Với mỗi iđêan I của R ta cũng kí hiệu $\mathrm{Var}(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của R chứa I. Mục tiêu của chương này là trình bày một số kết quả về tập iđêan nguyên tố gắn kết, chiều, số bội cho môđun Artin.

1.1. Tập các iđêan nguyên tố gắn kết

Tiết này dành để trình bày các tính chất của tập iđêan nguyên tố gắn kết của một môđun Artin dựa trên các tài liệu tham khảo của I. G. Macdonald [12], M. P. Brodmann và R. Y. Sharp [2]. Theo một nghĩa nào đó, tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun Artin có vai trò tương tự như tập iđêan nguyên tố liên kết của môđun hữu hạn sinh. Vì thế, nó là một công cụ hữu hiệu trong nghiên cứu cấu trúc của các môđun Artin. Cơ sở để đi đến định nghĩa tập iđêan nguyên tố gắn kết là biểu diễn thứ cấp.

Định nghĩa 1.1.1. (i) Cho $x \in R$. Nếu tồn tại một số tự nhiên n sao cho $x^n L = 0$ thì ta nói phép nhân bởi x trên L là *luỹ linh.* Nếu $xL = L$ thì ta nói phép nhân bởi x trên L là *toàn cấu.*

(ii) Ta nói L là *môđun thứ cấp* nếu $L \neq 0$ và với mỗi $x \in R$, phép nhân bởi x trên L hoặc là toàn cấu hoặc luỹ linh. Trong trường hợp này, tập tất cả các phần tử $x \in R$ sao cho phép nhân bởi x trên L là luỹ linh là một iđêan nguyên tố của R, kí hiệu là $\mathfrak{p}$. Hơn nữa, $\sqrt{\operatorname{Ann}_R L} = \mathfrak{p}$. Ta gọi L là $\mathfrak{p}$-*thứ cấp.*

(iii) Mỗi cách viết L dưới dạng $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$, trong đó mỗi L_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp, được gọi là một *biểu diễn thứ cấp* của L. Biểu diễn thứ cấp này gọi là tối tiểu nếu các $\mathfrak{p}_i$ đôi một khác nhau và mỗi L_i không thừa, tức là $L_i \neq L_1 + \ldots + L_{i-1} + L_{i+1} + \ldots + L_n$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Ta nói L là *R-môđun biểu diễn được* nếu nó có biểu diễn thứ cấp. Vì tổng của hữu hạn môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của L là $\mathfrak{p}$-thứ cấp nên mỗi biểu diễn thứ cấp đều có thể quy về tối tiểu.

Định lý 1.1.2 (Định lý duy nhất thứ nhất). *Giả sử $L = L_1 + \ldots + L_r = L'_1 + \ldots + L'_s$ là hai biểu diễn thứ cấp tối tiểu của L, trong đó L_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp với $i = 1, \ldots, r$ và L'_i là $\mathfrak{q}_i$-thứ cấp với $i = 1, \ldots, s$. Khi đó $r = s$ và $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s\}$.*

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử L biểu diễn được. Theo Định lý duy nhất thứ nhất, tập $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ chỉ phụ thuộc vào L mà không phụ thuộc vào biểu diễn thứ cấp tối tiểu của L. Ta gọi nó là tập *các iđêan nguyên tố gắn kết* của L và kí hiệu là $\operatorname{Att}_R(L)$. Mỗi phần tử của $\operatorname{Att}_R(L)$ là *iđêan nguyên tố gắn kết* của L. Nếu $\mathfrak{p}$ là tối tiểu trong tập $\operatorname{Att}_R(L)$ thì thành phần thứ cấp tương ứng gọi là *thành phần thứ cấp cô lập* của L.

Nhận xét 1.1.4. Rõ ràng L là R-môđun biểu diễn được thì $\operatorname{Att}_R(L)$ là hữu hạn. Hơn nữa, $\operatorname{Att}_R(L) = \emptyset$ nếu và chỉ nếu $L = 0$.

Định lý tiếp theo chỉ ra rằng các thành phần thứ cấp cô lập là duy nhất.

Định lý 1.1.5 (Định lý duy nhất thứ hai). *Giả sử L là biểu diễn được. Khi đó các thành phần thứ cấp cô lập của L không phụ thuộc vào biểu diễn thứ cấp tối tiểu của L.*

Định lý 1.1.6. *Cho $0 \to L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \to 0$ là dãy khớp các R-môđun biểu diễn được và các R-đồng cấu. Khi đó*

$$\operatorname{Att}_R(L'') \subseteq \operatorname{Att}_R(L) \subseteq \operatorname{Att}_R(L') \cup \operatorname{Att}_R(L'').$$

Định lý sau đây cho thấy ứng dụng của biểu diễn thứ cấp trong nghiên cứu môđun Artin.

Định lý 1.1.7. *Mọi môđun Artin đều biểu diễn được.*

Sau đây là một số kết quả về tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun Artin tương tự với các kết quả đã biết về tập iđêan nguyên tố liên kết của môđun hữu hạn sinh.

Mệnh đề 1.1.8. *Cho A là R-môđun Artin và $r \in R$. Khi đó*

(i) $rA = A$ nếu và chỉ nếu $r \in R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(A)} \mathfrak{p}$.

(ii) $\sqrt{\operatorname{Ann}_R A} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(A)} \mathfrak{p}$.

Chứng minh. Nếu $A = 0$ thì $\operatorname{Att}_R(A) = \emptyset$ theo Nhận xét 1.1.4. Vì thế khẳng định (i) và (ii) luôn đúng.

Giả sử $A \neq 0$ và $A = L_1 + \ldots + L_n$ là một biểu diễn thứ cấp tối tiểu của A, trong đó mỗi L_i là môđun con $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp của A. Khi đó $\operatorname{Att}_R(A) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

(i) Giả sử $r \in R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(A)} \mathfrak{p}$. Suy ra $rL_i = L_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Do đó $rA = A$. Ngược lại, nếu $r \in \mathfrak{p}_j$, với j nào đó ($1 \leq j \leq n$) thì tồn tại